Mouvement brownien réfléchi dans des cônes convexes et non-convexes

Approche analytique de la distribution stationnaire

Sandro Franceschi

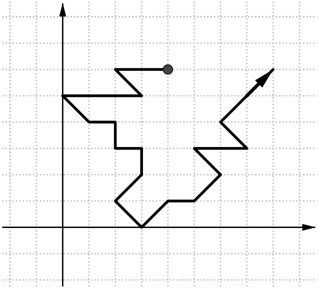
En collaboration avec
G. Fayolle et K. Raschel

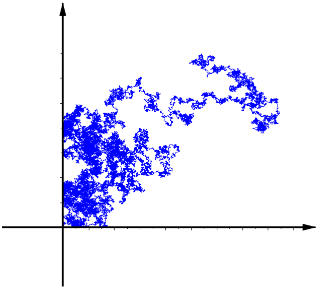
Angers, 7 décembre 2021

TELECOM SudParis

INSTITUT POLYTECHNIQUE DE PARIS

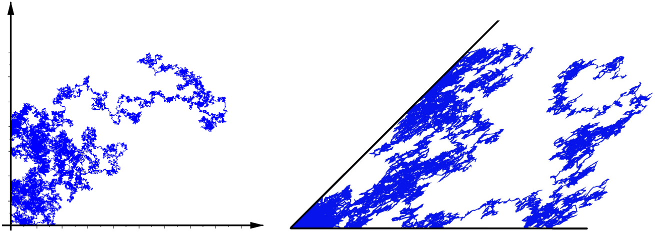
Introduction





- **Cas discret** : marche aléatoire
  Applications :
  - combinatoire
  - évolution de populations

- **Cas continu** : brownien
  Motivation initiale :
  - approximer des réseaux de files d'attente



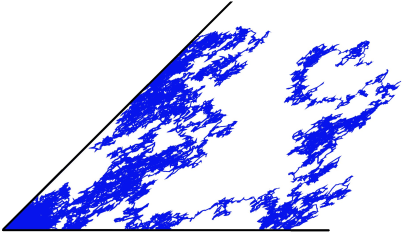
transformation linéaire

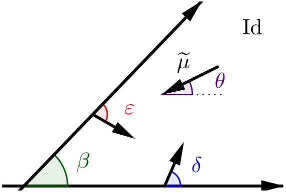
quadrant $\longleftrightarrow$ **cone**

covariance $\Sigma \longleftrightarrow$ angle β

cadre continu $\neq$ cadre discret

Réflexions obliques





- Réflexions obliques d'angle constant le long de chaque bord
- Dérive (drift)

Récurrence/transience

Selon les paramètres du modèle le processus Z_t est :

- **Transient** $Z_t \to \infty$ (mesures de Green)

$\hookrightarrow$ Quantité de temps que le processus passe dans un ensemble A

$$g(A) = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty \mathbb{1}_A(Z_u)\mathrm{d}u\right]$$

- **Récurrent** (distribution stationnaire/mesure invariante)

$\hookrightarrow$ Proportion de temps que le processus passe dans un ensemble A

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(Z_u)\mathrm{d}u\right]$$

♯ Objectif

- Étudier la transformée de Laplace (fonction génératrice) de la **distribution stationnaire**
  - Expression exacte (intégrales de contour, fonctions hypergéométriques, invariants conformes)
  - Nature algébrique (rationnelle, algébrique, D-F, D-A)

Méthode

- **Question** **probabiliste** : distribution stationnaire
  - Équations fonctionnelles à noyau (fonctions génératrices, transformées Laplace)

- **Méthodes et outils**
  - **Analytique**
    Problèmes frontières (Carleman ou Riemann-Hilbert, Sokhotski–Plemelj)
    $\hookrightarrow$ Fayolle, Malyshev, **Marches dans le quadrant**, années 70-80
  - **Combinatoire**
    Invariants de Tutte (Fonctions de découplage)
    $\hookrightarrow$ Tutte, **Triangulations colorées**, années 70-80
    $\hookrightarrow$ Bernardi, Bousquet-Mélou, Raschel, **Marches**, années 2010
  - **Algébrique**
    Théorie de Galois différentielle (Équation aux q-différences)
    $\hookrightarrow$ Dreyfus, Hardouin, Roques, Singer, **Marches**, années 2010

♯ Objectif

Développer pour le **Brownien** (continu) ces 3 méthodes habituellement utilisées pour les **marches dans le quadrant** (discret)

Plan

Plan

Temps local

- B_t mouvement brownien
- On définit le **temps local**

$$L_t^a = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \int_0^t \mathbf{1}_{[a, a+\epsilon]}(B_s) \mathrm{d}s$$

$\hookrightarrow$ densité de temps passé en a avant t

Formule du temps d'occupation

$$\int_0^t f(B_s) \mathrm{d}s = \int_{\mathbb{R}} f(a) L_t^a \mathrm{d}a$$

Réflexion en dimension 1

- $|B_t|$: **Brownien réfléchi** en dimension 1 = valeur absolue de B_t
- **Formule d'Itô**

$$f(B_t) = f(B_0) + \int_0^t f'(B_s)\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(B_s)\mathrm{d}s$$

$\hookrightarrow$ Appliquée à $f = |\cdot|$, $f' = \mathrm{sgn}$ et $f'' = 2\delta_0$

$$\Rightarrow |B_t| = 0 + \underbrace{\int_0^t \mathrm{sgn}(B_s)\mathrm{d}B_s}_{\substack{\text{mouvement brownien} \\ W_t}} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t 2\delta_0(B_s)\mathrm{d}s}_{\substack{\int_{\mathbb{R}} \delta_0(a) L_t^a \mathrm{d}a = L_t^0 \\ \text{formule d'occupation}}}$$

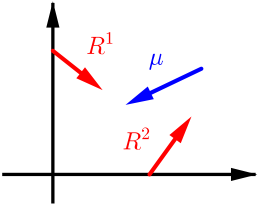
Formule de Tanaka

$$|B_t| = W_t + L_t^0$$

- W_t mouvement brownien
- L_t^0 temps local à l'origine

Paramètres du modèle

- W_t Brownien plan, covariance $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{pmatrix}$
- $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$ dérive
- $R = (R_1, R_2) = \begin{pmatrix} 1 & r_2 \\ r_1 & 1 \end{pmatrix}$ matrice de réflexion



Définition (Semimartingale Reflected Brownian Motion)

On définit un SRBM qui a pour point de départ z_0 par

$$Z_t = z_0 + W_t + \mu t + RL_t \in \mathbb{R}_+^2$$

où L_t^i est un processus continu et croissant, qui s'accroît uniquement lorsque le processus touche un axe.

$\hookrightarrow$ L_t est le **temps local** sur les axes $\hookrightarrow$ Problème de **Skorokhod**

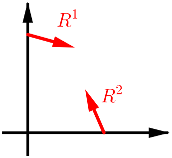
Brownien avec dérive réfléchi obliquement dans $\mathbb{R}_+^2$

Théorème (Reiman, Taylor, Williams, 1988 et 1993)

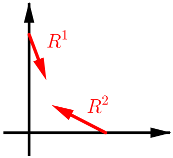
Un tel processus Z_t **existe** pour tout $t \geqslant 0$ sans absorption
$\Leftrightarrow r_1, r_2 > 0$ ou $1 - r_1 r_2 > 0$
$\Leftrightarrow \exists$ **combinaison convexe** de R^1 et R^2 qui appartient à $\mathbb{R}_+^2$.

Absorption à l'origine

Sinon, Z_t peut atteindre l'origine et y rester coincé : **absorption**



- Existence $\forall t$



- Pas d'existence $\forall t$

Absorption à l'origine

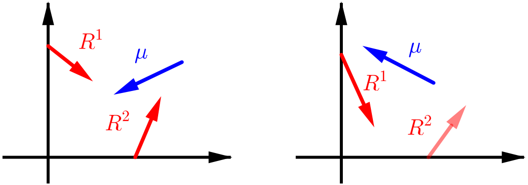
Récurrence / Transience

Proposition (D. Hobson et L. Rogers, 1993)

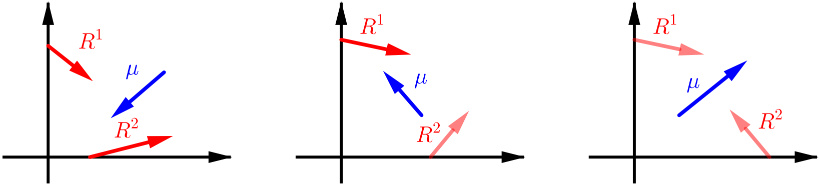
- *Récurrent* $\Leftrightarrow 1 - r_1 r_2 > 0, \quad \mu_1 - r_2\mu_2 \leqslant 0, \quad \mu_2 - r_1\mu_1 \leqslant 0$
- *Transient sinon*

▶ **Compétition entre dérive (drift) et vecteurs rebond**

Cas récurrent



Cas transient



Soit π la distribution stationnaire (ou mesure invariante) sur $\mathbb{R}_+^2$.

- Théorèmes ergodiques :
  $\hookrightarrow$ proportion moyenne de temps passé en $A \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}u\right]$$

- Qu'en est-il sur les frontières ?

Distribution stationnaire et frontières

Soit π la distribution stationnaire (ou mesure invariante) sur $\mathbb{R}_+^2$.

- Théorèmes ergodiques :
  $\hookrightarrow$ proportion moyenne de temps passé en $A \in \mathbb{R}_+^2$:

$$\pi(A) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{E}\left[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}u\right]$$

- Qu'en est-il sur les frontières ?
  $\hookrightarrow$ proportion moyenne de temps **local**
  On définit ν_1 une mesure sur le bord, pour $A \in \{0\} \times \mathbb{R}$,

$$\nu_1(A) = \mathbb{E}_\pi\left[\frac{1}{t}\int_0^t \mathbb{1}_A(B_u)\mathrm{d}L_u^1\right].$$

  De même on définit ν_2.

▶ *Distributions stationnaires sur les frontières*

- **Cas discret :** la fonction génératrice de la distribution stationnaire $\pi_{i,j}$ sur $\mathbb{Z}_+^2$ est la **série génératrice** $\sum_{\mathbb{Z}_+^2} \pi_{i,j} x^i y^j$.
- **Cas continu :**
  - La fonction génératrice de la **distribution stationnaire** est la **transformée de Laplace**

$$L(x,y) = \iint_{\mathbb{R}_+^2} e^{xu+yv} \pi(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

  - Sur les *frontières* on définit

$$L_2(x) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{xu} \nu_2(u) \mathrm{d}u, \quad L_1(y) = \int_{\mathbb{R}_+} e^{yv} \nu_1(v) \mathrm{d}v$$

Équation fonctionnelle

Cette équation qui relie les transformées de Laplace **caractérise** la distribution stationnaire.

Équation fonctionnelle

$$-K(x,y)L(x,y) = K_1(x,y)L_1(y) + K_2(x,y)L_2(x)$$

où

$$\begin{cases} K(x,y) = \frac{1}{2}(\sigma_{11}x^2 + \sigma_{22}y^2 + 2\sigma_{12}xy) + \mu_1 x + \mu_2 y, \\ K_1(x,y) = x + r_1 y, \\ K_2(x,y) = r_2 x + y. \end{cases}$$

- Connecte ce qui se passe dans le quart de plan et sur ses frontières.
- La fonction K est appelée le noyau.

Preuve : Formule d'Itô.

Preuve de l'équation fonctionnelle

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G} f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur. ⚠domaine du générateur !

Remarque : Les relations suivantes caractérisent la distribution stationnaire dans différents cas :

- $\pi(P - I) = 0$ pour les chaînes de Markov,
- $\pi Q = 0$ pour les chaînes de Markov à temps continu,
- $\int \mathcal{G} f d\pi = 0$ pour les processus de Markov où $\mathcal{G}$ est le générateur. ⚠domaine du générateur !

La relation analogue pour le mouvement brownien réfléchi dans le quadrant est la "**basic adjoint relationship**" :

$$\forall f \in \mathcal{C}_b^2(\mathbb{R}_+^2) \quad \int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G} f(z)\pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2} \int_{\mathbb{R}_+^2} D_i f(z)\nu_i(\mathrm{d}z) = 0$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur "dans" le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2}\mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs "sur les frontières" sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

Preuve de l'équation fonctionnelle

où le générateur "dans" le quadrant est

$$\mathcal{G}f(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\sigma_{i,j}\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2}(z) + \sum_{i=1}^{2}\mu_i \frac{\partial f}{\partial z_i}(z)$$

et pour $i = 1, 2$ les générateurs "sur les frontières" sont

$$D_i f(x) = \langle R^i | \nabla f \rangle.$$

$\hookrightarrow$ On doit juste prendre $f = e^{\langle (x,y)|.\rangle}$ dans la *basic adjoint relationship* pour obtenir l'équation fonctionnelle. En effet

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} \mathcal{G}e^{\langle (x,y)|z\rangle}\pi(\mathrm{d}z) + \sum_{i=1,2}\int_{\mathbb{R}_+^2} D_i e^{\langle (x,y)|z\rangle}\nu_i(\mathrm{d}z) = 0$$

donne

$$K(x,y)L(x,y) = K_1(x,y)L_1(y) + K_2(x,y)L_2(x).$$

Plan

Étapes clés

Méthode analytique

- Trouver une **équation fonctionnelle**
- Étudier le **noyau** (surface de Riemann, groupe)
- **Prolonger** analytiquement les fonctions génératrices
- Établir un **problème frontière**
- Le **résoudre** (formules de Sokhotski–Plemelj, invariants conformes)

Résultat

Formule explicite intégrale de la fonction génératrice

- Le **noyau** K peut s'écrire $K(x, y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

$\hookrightarrow$ Deux branches : $Y^{\pm}(x) = \frac{-b(x) \pm \sqrt{b^2(x) - 4a(x)c(x)}}{2a(x)}$

On a $K(x, Y^{\pm}(x)) = 0.$

$\hookrightarrow$ Points de branchements $x^{\pm}$: racines du polynôme $b^2 - 4ac$

Noyau et surface de Riemann

- Le **noyau** K peut s'écrire $K(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$

$\hookrightarrow$ Deux branches : $Y^{\pm}(x) = \frac{-b(x)\pm\sqrt{b^2(x)-4a(x)c(x)}}{2a(x)}$

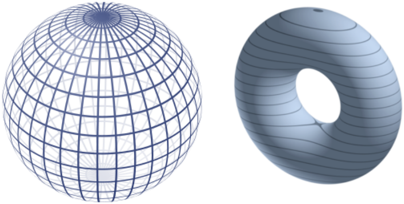
On a $K(x, Y^{\pm}(x)) = 0.$

$\hookrightarrow$ Points de branchements $x^{\pm}$: racines du polynôme $b^2 - 4ac$

- **Surface de Riemann** $\mathcal{S}$ = zéros du noyau K

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 : K(x,y) = 0)\}}$$

- $\mathcal{S}$ est une **sphère** dans le cas **continu** (brownien)
- $\mathcal{S}$ est une **tore** dans le cas **discret** (marches)



Groupe du processus

- Le noyau peut s'écrire $K(x,y) = a(x)y^2 + b(x)y + c(x)$
- On définit ζ **l'automorphisme de $\mathcal{S}$ qui laisse stable x**

$$\begin{array}{cccccc} \zeta & : & \mathcal{S} & \longrightarrow & \mathcal{S} \\ & & (x,y) & \longmapsto & \left(x, \frac{c(x)}{a(x)}\frac{1}{y}\right) \end{array}$$

On a

$$\zeta(x, Y^+(x)) = (x, Y^-(x))$$

De même on note η l'automorphisme de $\mathcal{S}$ qui laisse stable y

Uniformisation

Paramétrisation (ou uniformisation) **rationnelle**

$$\boxed{\mathcal{S} = \{(x(s), y(s)) : s \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}\}}$$

où

$$\begin{cases} x(s) = \dfrac{x^+ + x^-}{2} + \dfrac{x^+ - x^-}{4}\left(s + \dfrac{1}{s}\right) \\ y(s) = \dfrac{y^+ + y^-}{2} + \dfrac{y^+ - y^-}{4}\left(\dfrac{s}{e^{i\beta}} + \dfrac{e^{i\beta}}{s}\right) \end{cases}$$

avec

$$\beta = \operatorname{arccos}\left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)$$

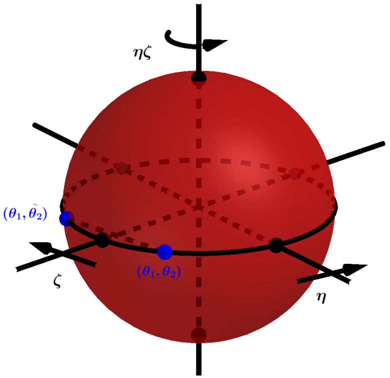
On note

$$\boxed{q = e^{2i\beta}}$$

on a alors

$$\zeta(s) = \frac{1}{s}, \quad \eta(s) = \frac{q}{s}, \quad \eta\zeta(s) = qs$$

Recouvrement de $\mathcal{S}$ et prolongement



- ζ et η sont des **symétries axiales** de la sphère $\mathcal{S}$
- $\eta\zeta$ est une **rotation** de d'angle $\beta = \arccos\left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)$
- La **finitude du groupe** $\langle\zeta, \eta\rangle$ équivaut à $\frac{\beta}{\pi} \in \mathbb{Q}$

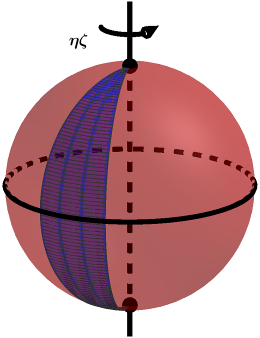
- L_1 et L_2 initialement définies sur un sous domaine de $\mathcal{S}$
- Grâce à η et ζ et à l'équation

$$0 = K_1(x, y)L_1(y) + K_2(x, y)L_2(x)$$

on a la **formule de prolongement** :

$$L_1(\eta\zeta s) = \frac{K_2(\zeta s)K_1(s)}{K_1(\zeta s)K_2(s)} L_1(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{S}$$

$$\boxed{L_1(qs) = G(s)L_1(s)}$$

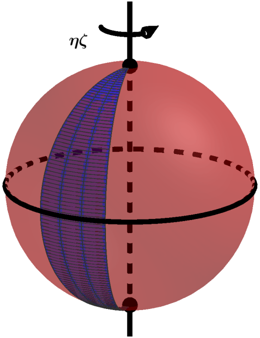


- L_1 et L_2 initialement définies sur un sous domaine de $\mathcal{S}$
- Grâce à η et ζ et à l'équation

$$0 = K_1(x,y)L_1(y) + K_2(x,y)L_2(x)$$

on a la **formule de prolongement** :

$$L_1(\eta\zeta s) = \frac{K_2(\zeta s)K_1(s)}{K_1(\zeta s)K_2(s)} L_1(s) \quad \text{pour } s \in \mathcal{S}$$



$$\boxed{L_1(qs) = G(s)L_1(s)}$$

▶ Par itération on **prolonge méromorphiquement** sur $\mathcal{S}$
▶ Les pôles de L_1 proviennent des zéros des fonctions K_1 et K_2 et de leurs images par le groupe $\langle \zeta, \eta \rangle$

Surface de Riemann

- **Automorphisme** de Galois de $\mathcal{S}$ et groupe
- **Paramétrisation** (uniformisation) de la surface de Riemann $\mathcal{S}$
- **Prolongement** analytique des transformées de Laplace sur $\mathcal{S}$
- Sur $\mathcal{S}$, la première partie des équations fonctionnelles s'annule :

$$0 = K_1 L_1 + K_2 L_2$$

$\hookrightarrow$ Simplification (une fonction inconnue en moins)

Objectif : calculer L_1

Méthode : Déterminer un **problème frontière** (en éliminant L_2)

Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

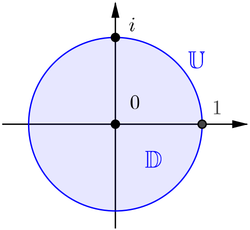
Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

Exemple :

1. I est méromorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et a un seul pôle, d'ordre un en 0
2. $\boxed{I(\bar{x}) = I(x)}$ pour $x \in \mathbb{U}$ le cercle unité



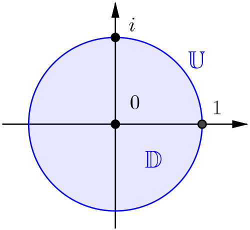
Qu'est-ce qu'un problème frontière ?

Un problème frontière est fait de deux conditions :

- une **condition de régularité** sur un ensemble
- une **condition frontière**

Exemple :

1. I est méromorphe sur le disque unité $\mathbb{D}$ et a un seul pôle, d'ordre un en 0
2. $\boxed{I(\bar{x}) = I(x)}$ pour $x \in \mathbb{U}$ le cercle unité



La solution (aux constantes près) est $\boxed{I(x) = x + \dfrac{1}{x}}$.

I est une **fonction de collage conforme** qui réunit les parties supérieure et inférieure de $\mathbb{U}$.

I est un **invariant pour la conjugaison** sur le bord $\mathbb{U}$.

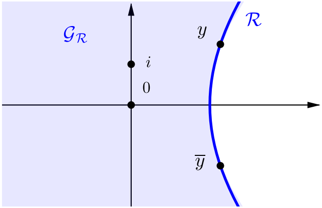
Problème frontière

Problème frontière (2019, F., Raschel, *Bernoulli*)

1. L_1 est méromorphe sur $\mathcal{G}_{\mathcal{R}}$ et tend vers 0 en l'infini ;
2. L_1 vérifie la condition frontière

$$\boxed{L_1(\overline{y}) = G(y)L_1(y), \qquad \forall y \in \mathcal{R}.}$$

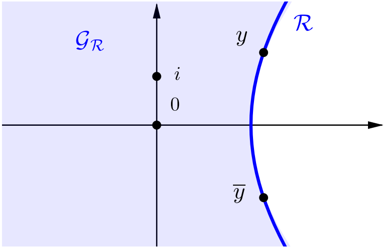
- $G(y) = \frac{K_1}{K_2}(X^-(y), y)\frac{K_2}{K_1}(X^-(y), \overline{y})$
- $\mathcal{R}$ est une **hyperbole** définie par le noyau



- $\mathcal{R}$ **hyperbole** symétrique par rapport aux abscisses qui vérifie :

► **Si** $y \in \mathcal{R}$ et $K(x,y) = 0$ **alors** $\bar{y} \in \mathcal{R}$ et $K(x,\bar{y}) = 0$

$\hookrightarrow Y^+(x) \in \mathcal{R} \Rightarrow \overline{Y^+}(x) = Y^-(x) \in \mathcal{R}$



Preuve de la condition frontière

On évalue l'équation fonctionnelle en $(x, Y^+(x))$ et en $(x, Y^-(x))$ pour annuler le noyau. On obtient

$$0 = K_1(x, Y^+(x))L_1(Y^+(x)) + K_2(x, Y^+(x))L_2(x)$$

$$0 = K_1(x, Y^-(x))L_1(Y^-(x)) + K_2(x, Y^-(x))L_2(x)$$

On élimine $L_2(x)$ et on déduit que

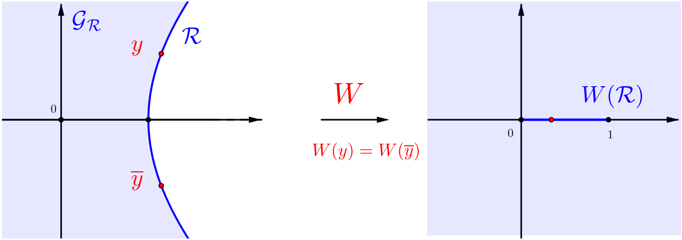
$$\Rightarrow \quad L_1(Y^+(x))) = \underbrace{\frac{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^-(x))}{\frac{K_1}{K_2}(x, Y^+(x))}}_{G} L_1(Y^-(x)))$$

Et donc

$$L_1(\overline{y}) = G(y)L_1(y), \ \forall y \in \mathcal{R}.$$

Fonction de collage conforme

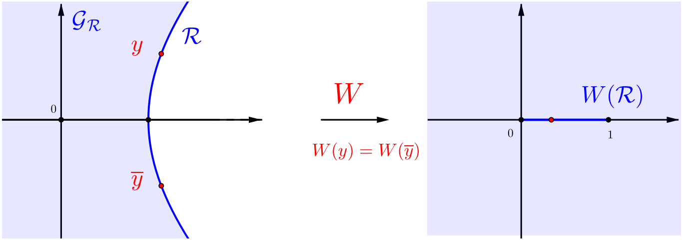
- La fonction de collage conforme W (ou invariant canonique) réunit les parties supérieure et inférieure de l'hyperbole $\mathcal{R}$



$$W(y) = T_{\frac{\pi}{\beta}}\left(-\frac{2y - (y^+ + y^-)}{y^+ - y^-} \right)$$

- $\beta = \arccos\left(\frac{-\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}\sigma_{22}}}\right)$ est l'angle du cône
- $T_{\frac{\pi}{\beta}}$ est un **polynôme de Tchebychev généralisé**

  $T_{\frac{\pi}{\beta}}(x) = \cos(\frac{\pi}{\beta}\arccos(x)) = \frac{1}{2}\left\{\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\beta}} + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^{\frac{\pi}{\beta}}\right\}$



Problème frontière de **Carleman** $\longrightarrow$ Problème frontière de **Riemann**

▶ $L_1(\overline{y}) = G(y)L_1(y), \forall y \in \mathcal{R}$

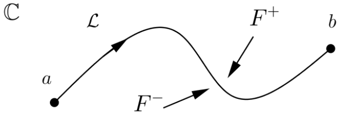
- $M := L_1 \circ W^{-1}$ et
- M^+ et M^- la limite en haut et en bas de M sur $[0, 1]$
- $H := G \circ W^{-1}$

▶ $\boxed{M^+(t) = H^-(t)M^-(t), \forall t \in [0, 1]}$

Formules de Sokhotski–Plemelj

On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$

$$F(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t - z} \,\mathrm{d}t$$



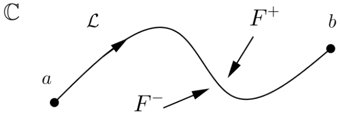
- F est sectionellement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$
- F^+ et F^- sont les limites de F de part et d'autre de $\mathcal{L}$

Formule de Sokhotski–Plemelj

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t)$$

On définit pour $z \in \mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$

$$F(z) := \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{f(t)}{t-z} \, \mathrm{d}t$$



- F est sectionellement analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$
- F^+ et F^- sont les limites de F de part et d'autre de $\mathcal{L}$

Formule de Sokhotski–Plemelj

$$F^+(t) - F^-(t) = f(t)$$

$M = e^F$ et $f = \ln H \Rightarrow M^+ = H^- M^-$

Solution du problème frontière de Riemann

- Si $M^+ = H^- M^-$ alors

$$M = \exp \frac{1}{2i\pi} \int_{\mathcal{L}} \frac{\ln H(t)}{t-z} \, \mathrm{d}t$$

Expression explicite

Expression intégrale (2019, F., Raschel, *Bernoulli*)

$$L_1(y) = \left(\frac{W(0) - W(p)}{W(y) - W(p)}\right)^{-\chi} \exp\left\{\frac{1}{2i\pi}\int_{\mathcal{R}^-} \log G(t) \frac{W'(t)}{W(t) - W(y)} \mathrm{d}t\right\}$$

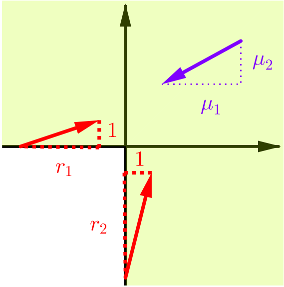
- Inversion de la transformée de Laplace L_1

$\hookrightarrow$ distribution stationnaire

Dans certains cas cette formule intégrale peut se simplifier

Plan

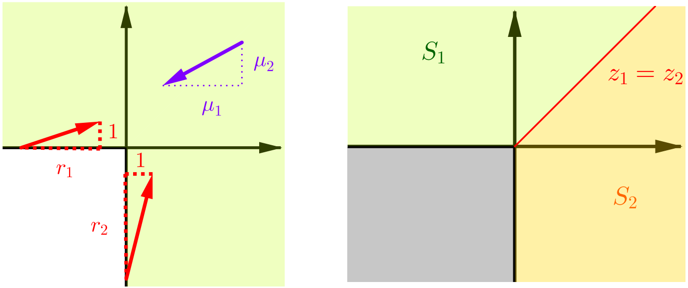
Trois quart de plan



$$\textcolor{blue}{L(x,y)} = \iint_{\text{3/4 plan}} e^{xu+yv}\pi(u,v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

Problème : dans trois quarts de plan la transformée de Laplace L ne converge sur aucun domaine.

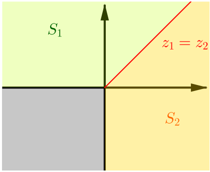
Trois quart de plan



$$L(x,y) = \iint_{3/4 \text{ plan}} e^{xu+yv} \pi(u,v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v$$

Problème : dans trois quarts de plan la transformée de Laplace L ne converge sur aucun domaine.

Solution : Diviser le 3/4 de plan en deux.



Dans S_1

$$L_1(x,y) = \int_{S_1} e^{xz_1+yz_2}\pi(z_1,z_2)\mathrm{d}z_1\mathrm{d}z_2,$$

Bord sur la diagonale

$$m(x+y) = \int_0^\infty e^{(x+y)z}\pi(z,z)\mathrm{d}z,$$

$$n(x+y) = \int_0^\infty e^{(x+y)z}\left(\frac{\partial\pi}{\partial z_1}(z,z) - \frac{\partial\pi}{\partial z_2}(z,z)\right)\mathrm{d}z,$$

Bord sur l'axe des abscisses

$$\ell_1(x) = \int_{-\infty}^0 e^{xz_1}\nu_1(z_1)\mathrm{d}z_1.$$

Couple d'équations fonctionnelles

Proposition (Equation dans S_1)

$$K(x,y)L_1(x,y)+k_1(x,y)\ell_1(x)+k(x,y)m(x+y)+\theta n(x+y)+E=0,$$

$$\textit{dans le domaine } \{\Re(x)\geq 0,\ \Re(x+y)\leq 0\}.$$

Proposition (Equation dans S_2)

$$K(x,y)L_2(x,y)+k_2(x,y)\ell_2(y)-k(x,y)m(x+y)-\theta n(x+y)-E=0,$$

$$\textit{dans le domaine } \{\Re(y)\geq 0,\ \Re(x+y)\leq 0\}.$$

$$\begin{cases} K(x,y)=\frac{1}{2}\left(\sigma_1x^2+2\rho xy+\sigma_2y^2\right)+\mu_1x+\mu_2y, \\ k(x,y)=\frac{\theta(y-x)}{2}+\frac{1}{2}(\sigma_2-\sigma_1)(x+y)+\mu_2-\mu_1, \\ k_1(x,y)=r_1x+y \text{ et } k_2(x,y)=x+r_2y, \\ E=(1-r_1)\nu_1(0)-(1-r_2)\nu_2(0) \text{ et } \theta=\frac{\sigma_1+\sigma_2-2\rho}{2}. \end{cases}$$

Changement de variables

Problèmes

- On ne peut pas résoudre séparément chacune des équations (trop de fonctions inconnues)
- Les deux équations n'ont pas le même domaine de convergence (on ne peut pas les sommer directement)

Solution : deux changements de variables

$$\begin{cases} p = -x, & q = x + y, \quad \text{dans l'équation sur } S_1 \\ p = -y, & q = x + y, \quad \text{dans l'équation sur } S_2 \end{cases}$$

donne

$$\begin{cases} U(p,q)L_1(p,q) + C(p,q)\ell_1(p) + A(p,q)m(q) + \theta n(q) + E = 0 \\ V(p,q)L_2(p,q) + D(p,q)\ell_2(p) + B(p,q)m(q) - \theta n(q) - E = 0 \end{cases}$$

On a résolu le problème de convergence mais on a maintenant deux noyaux différents !

Problème frontière vectoriel

Les deux noyaux ont les même points de branchement !

On note P_1^u et P_1^v les branches des deux noyaux.

Proposition (2021+, Fayolle, F., Raschel)

En notant $L(q) = [\ell_1(P_1^u(q)), \ell_2(P_1^v(q))]$ on a

$$\boxed{L^+(q) = G(q)L^-(q), \quad \forall q \in (-\infty, q_1],}$$

où $G(q)$ est une matrice 2×2.

Problème frontière vectoriel

Les deux noyaux ont les même points de branchement !

On note P_1^u et P_1^v les branches des deux noyaux.

Proposition (2021+, Fayolle, F., Raschel)

En notant $L(q) = [\ell_1(P_1^u(q)), \ell_2(P_1^v(q))]$ on a

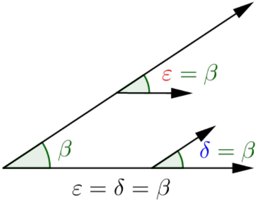
$$\boxed{L^+(q) = G(q)L^-(q), \quad \forall q \in (-\infty, q_1],}$$

où $G(q)$ est une matrice 2×2.

- Avec un changement de variables on peut se ramener au disque unité
$$M(z) = H(z)M(1/z)$$
- On sait résoudre le cas symétrique (qui se ramène au cas du quadrant)

Plan

Cas de la réflexion orthogonale

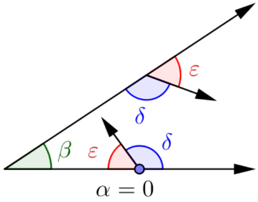


Théorème (2017, F., Raschel, *ESAIM*)

Dans le cas orthogonal

$$L_1(y) = \frac{-\mu_1 W'(0)}{W(y) - W(0)} y,$$

où W est la fonction de collage conforme.



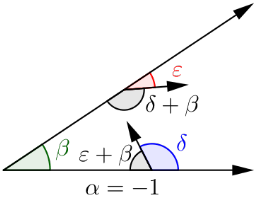
Théorème (*Skew* symétrie)

Dans le cas de la skew symétrie

$$L_1(y) = \frac{Cte}{a - y}.$$

La distribution stationnaire a une **forme produit** *sur* $\mathbb{R}^2$ *et est* **exponentielle**.

Cas de Dieker-Moriarty



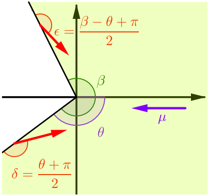
Théorème (Dieker-Moriarty)

Dans le cas de **Dieker-Moriarty**

$$L_1(y) = \frac{Cte}{P(y)},$$

La distribution stationnaire est alors une **somme d'exponentielles**.

Cas algébrique remarquable



Théorème (Cas algébrique remarquable)

Lorsque les conditions ci dessus sont réunis on a

$$L_1(y) = \frac{Cte}{\sqrt{y^+ - y}},$$

La distribution stationnaire frontière est une **loi Gamma***.*
La distribution stationnaire π *vaut en coordonnées polaires* (ρ, t)

$$\pi(\rho, t) = \frac{C}{\sqrt{\rho}} \cos\left(\frac{\theta - t}{2}\right) e^{-2\rho|\mu| \cos^2(\frac{\theta-t}{2})}$$

Merci pour votre attention !

M. BOUSQUET-MELOU, A. ELVEY PRICE, S. FRANCESCHI, C. HARDOUIN, K. RASCHEL - "The stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge : differential properties", arXiv:2101.01562 (2021)

A. DIEKER AND J. MORIARTY - "Reflected Brownian motion in a wedge : sum-of-exponential stationary densities.", *Electron. Commun. Probab.*, 14 :1–16, (2009).

G. FAYOLLE, S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - *On the stationary distribution of reflected Brownian motion in a non-convex wedge,* arXiv :2102.11754.

G. FAYOLLE, R. IASNOGORODSKI AND V. MALYSHEV - *Random walks in the quarter-plane,* Application of Mathematics (New York), vol. 40, Springer, (1999).

S. FRANCESCHI AND K. RASCHEL - "Integral expression for the stationary distribution of reflected Brownian motion in a wedge", *Bernoulli,* (2019).

R. J. WILLIAMS - "Semimartingale reflecting Brownian motions in the orthant.", *Stochastic Networks,* **13** (1995).